Глухов Егор (9 класс)

«Плавные последовательности»

Работа заняла II место на Окружном этапе Областного конкурса исследовательских проектов «Взлет» в секции «Математика»
Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа и теории функций Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, преподаватель математики Лицея № 1 «Спутник» Алякин Владимир Алексеевич

Введение

Последовательности являются важнейшим объектом исследований, им находят применения, они встречаются во всех разделах математики. Выделяются различные классы последовательностей: ограниченные, монотонные, сходящиеся и так далее. В работе [1] изучались плавные последовательности, когда вторые разности ограничены. Плавные последовательности в таком понимании моделируют движение тел. Из вышесказанного вытекает актуальность настоящей работы.

Первой основной целью работы является изучение плавных последовательностей по 1-м, 2-м и 3-м разностям [2], [3] и решение для таких последовательностей основной задачи по нахождению наибольшей высоты графика такой последовательности.

Второй основной целью настоящей работы является ещё одно определение плавности последовательностей. Для таких последовательностей естественной является задача о нахождении наименьшего среднеарифметического чисел. Такое понимание плавности, видимо, является новым.

Структура работы является следующей:

В первом параграфе объясняется понятие рядов разности и даётся определение плавным последовательностям по разностям соседних чисел.

Во втором параграфе рассматривается задача о нахождении наибольшей высоты последовательности плавной по 1-у, 2-у, 3-у ряду разностей.

В третьем параграфе даётся определение плавных последовательностей по модулям соседних чисел и рассматриваются их свойства.

1. Плавные последовательности по разностям соседних чисел

Коротко разъясним понятие рядов разности. Рассмотрим последовательность чисел.

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Первым рядом разностей этой последовательности называется последовательность чисел

$$a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_n^{(1)}, \ldots$$

где

$$a_0^{(1)} = a_1 - a_0, \quad a_1^{(1)} = a_2 - a_1, \quad a_2^{(1)} = a_3 - a_2, \ldots$$
$$\ldots, a_n^{(1)} = a_{n+1} - a_n, \ldots$$

Вторым рядом разностей этой последовательности называется последовательность чисел

$$a_0^{(2)}, a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \ldots, a_n^{(2)}, \ldots$$

где

$$a_0^{(2)} = a_1^{(1)} - a_0^{(1)}, \quad a_1^{(2)} = a_2^{(1)} - a_1^{(1)}, \quad a_2^{(2)} = a_3^{(1)} - a_2^{(1)}, \ldots$$
$$\ldots, a_n^{(2)} = a_{n+1}^{(1)} - a_n^{(1)}, \ldots$$

Аналогично определяется и любой следующий р-й ряд разностей. Ряды разностей удобно расположить в виде треугольника.

	a_0	a_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_n
Δ^1		$a_0^{(1)}$	$a_1^{(1)}$	$a_2^{(1)}$	$\ldots$	$a_{n-1}^{(1)}$
Δ^2			$a_0^{(2)}$	$a_1^{(2)}$	$\ldots$	$a_{n-2}^{(2)}$

В работе [1] было дано определение плавной последовательности, как последовательности, у которой вторые разности [2], [3] ограничены единицей.

Мы обобщим это определение на любые разности и вместо единицы возьмём любое число. Получаем следующее определение.

Определение. Пусть $a > 0$, $p \in N$. Последовательность вещественных чисел $\{x_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, называется плавной по р-ым разностям с показателем а (коротко, (р, а) - плавной), если последовательность р-ых разностей $\{\Delta^{(p)} x_k\}$ ограничена числом а.

$$\{\Delta^{(p)} x_k\} \le a, \; k = 1, 2, 3, \ldots$$

Данное определение плавных последовательностей модулирует движение физических тел. Если последовательность представляет координату х, то аналог 1-х разностей $\{\Delta^1 x_k\}$ - скорости тела в каждый момент, а аналог 2-х разностей $\{\Delta^2 x_k\}$ – изменение скоростей или ускорение. Важно оценить высоту графика или максимальный член такой последовательности. Такая оценка является решением некоторых задач характерных для теории оптимального управления [1].

2. Задача о нахождении наибольшей высоты плавной последовательности

В работе [1] была решена следующая задача.

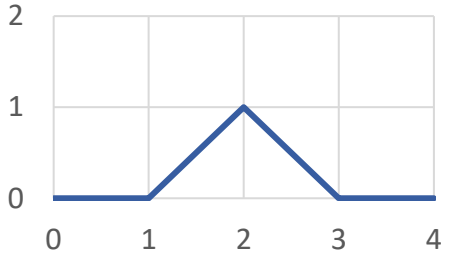
Задача. Пусть $x_0 = x_1 = x_n = x_{n+1} = 0$, а все остальные x_k - целые числа. Если последовательность $\{x_k\}$, k = 0, 1, 2, …, n, n+1 – (2,1) – плавная, то какое наибольшее значение может иметь наибольший член этой последовательности. Иначе, какова наибольшая высота графика последовательности $\{x_k\}$.

Нашей целью является решение общей задачи где, *p* и *a* – произвольные.

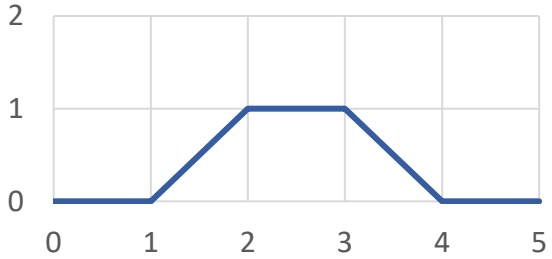
Теорема 1. Наибольшая высота для (1, a) – плавной последовательности, равна $\left[\frac{n-1}{2}\right] a$.

Доказательство. При a = 1 построим графики для малых n:

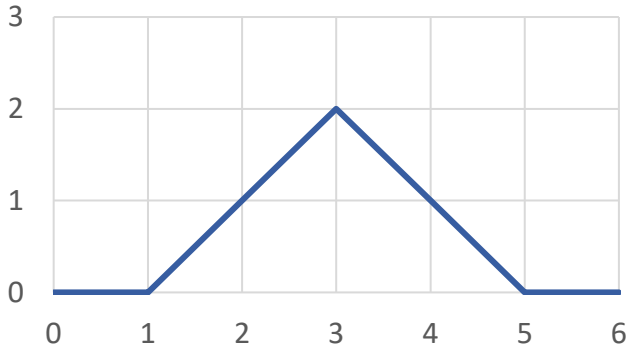
n = 3



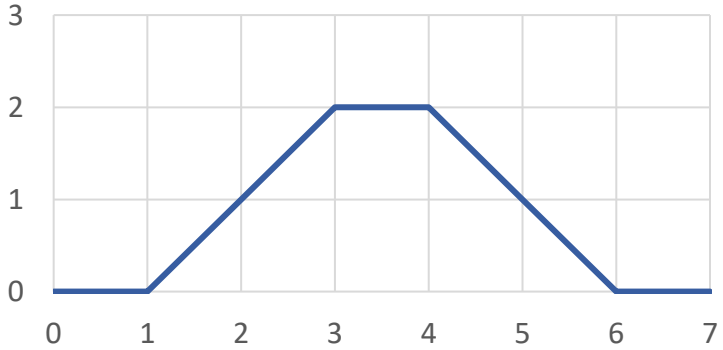
n = 4



n = 5



n = 6



В общем случае

Если n четно, то $\frac{n}{2} - 1$

Если n нечетно, то $\frac{n-1}{2}$

Для любого n получаем $[\frac{n-1}{2}]$. Теорема доказана.

Теорема 2. Наибольшая высота для (2, a) – плавной последовательности равна $[[\frac{n}{2}]^2/4]a$

Приведём доказательство из работы [1].

Для нахождения максимального члена плавной последовательности можно рассматривать только симметричные пути. Если $a_m a_{m+1}$ - верхушка, то более длинную из частей $a_1 \ldots a_m$ и $a_{m+1} \ldots a_n$ можно укоротить заменив её симметричным отражением другой части относительно серединного перпендикуляра к отрезку $a_m a_{m+1}$. Поэтому можно рассматривать только участок подъема (отведя на него не более n/2 – 1 шагов). Отсюда видно, что для четного n максимальная высота подъема будет такой же, как и для следующего (нечётного) n.

Ясно, что сначала выгодно максимальным образом наращивать скорость подъема: Δ^1 $1 + 2 + 3 + \ldots$; но так можно поступать только до половины подъема, чтобы успеть снизить скорость

Оценим первый ряд разности с двух сторон подъема:

$a_1 - a_0 = 0$ $\quad$ $a_{m+1} - a_m = 0$

$a_2 - a_1 \le 1$ $\quad$ $a_m - a_{m-1} \le 1$

$a_3 - a_2 \le 2$ $\quad$ $a_{m-1} - a_{m-2} \le 2$

… $\quad$ …

Чтобы получить оценку для наибольшей высоты h_n т.е. величины $a_m - a_0 = a_{m+1} - a_0$ нужно сложить оценки первых разностей. Таким образом.

Для n = 4k – 2

$h_n \le 1 + 2 + \ldots + (k - 1) + (k - 1) + \ldots + 2 + 1 = k(k - 1)$

Для n = 4k

$h_n \le 1 + 2 + \ldots + (k - 1) + k + (k - 1) + \ldots + 2 + 1 = k^2$

При этом высота h_n для нечетного n равна высоте h_{n-1}

Ответ можно записать в короткой форме $h_n = \left[\frac{n}{4}\right] \cdot \left[\frac{n+2}{4}\right] = [[\frac{n}{2}]^2/4]a$

Теорема доказана.

Для последовательностей, плавных по 3-м разностям имеем пример.

	0	0	1	4	10	18	27	36	44	50	53	54	54	53	50	44	36	27	18	10	4	1	0	0
Δ^1		0	1	3	6	8	9	9	8	6	3	1	0	-1	-3	-6	-8	-9	-9	-8	-6	-3	-1	0
Δ^2			1	2	3	2	1	0	-1	-2	-3	-2	-1	-1	-2	-3	-2	-1	0	1	2	3	2	1
Δ^3				1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1

57
56
55
54
53
52
51
50
49
48
47
46
45
44
43
42
41
40
39
38
37
36
35
34
33
32
31
30
29
28
27
26
25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22

n = 22 $_5$ h = 54

3. Плавные последовательности по модулям соседних чисел.

Определение. Конечную последовательность $\{a_1, \ldots, a_n\}$ назовём плавной по модулям соседних чисел, если

$$a_1 = 0,\ |a_2| \le |a_1 + 1|,\ |a_3| \le |a_2 + 1|,\ \ldots,\ |a_k| \le |a_{k-1} + 1|,\ \ldots,\ |a_n| \le |a_{n-1} + 1|.$$

Задача. При фиксированном n найти наименьшее значение среднего арифметического чисел $a_1, \ldots, a_n$ для любой последовательности $\{a_1, \ldots, a_n\}$, плавной по модулям соседних чисел.

Теорема 3. Для любой плавной последовательности по модулям соседних чисел выполняется неравенство:

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \ge -\frac{1}{2}$$

Доказательство. Возведя в квадрат неравенства

$$|a_2| \le |a_1 + 1|,\ |a_3| \le |a_2 + 1|,\ \ldots,\ |a_n| \le |a_{n-1} + 1|$$

И равенство $a_{n+1} = |a_n + 1|$, имеем

$$a_1^2 = 0$$
$$a_2^2 \le a_1^2 + 2a_1 + 1,$$
$$a_3^2 \le a_2^2 + 2a_2 + 1,$$
$$\ldots$$
$$a_n^2 \le a_{n-1}^2 + 2a_{n-1} + 1,$$
$$a_{n+1}^2 \le a_n^2 + 2a_n + 1$$

Складывая, получаем:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2 + a_{n+1}^2 \le a_1^2 + 2a_1 + 1 + a_2^2 + 2a_2 + 1 + \ldots + a_n^2 + 2a_n + 1$$

Приведя подобные слагаемые, получаем:

$$a_{n+1}^2 \le 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + n,$$
$$2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + n \ge 0,$$
$$2\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} + 1 \ge 0,$$
$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \ge \frac{1}{2}$$

Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть $\{a_1, \ldots, a_n\}$ последовательность, плавная по модулям соседних чисел. Если n четно, то наименьшее значение среднеарифметического чисел $a_1, \ldots, a_n$ равно $-\frac{1}{2}$.

Доказательство. В силу теоремы 3:

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \ge -\frac{1}{2}$$

Докажем, что при четных n значение $-\frac{1}{2}$ достигается. Рассмотрим последовательность:

$$a_1 = 0,\ a_2 = -1,\ a_3 = 0,\ a_4 = -1,\ \ldots,\ a_n = (-1)^{n-1} - 1.$$

Имеем:

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \frac{\frac{n}{2}(-1)}{n} = -\frac{1}{2}$$

Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть $\{a_1, \ldots, a_n\}$ последовательность, плавная по модулям соседних чисел, причём числа $a_1, \ldots, a_n$ - целые. Если n нечетно, то наименьшее значение среднеарифметического чисел $a_1, \ldots, a_n$ равно $-\frac{n-1}{2n}$.

Доказательство. Пусть n = 2k – 1, k = 1, 2, … Получим $a_1 = 0$, $a_3 = 0$, $a_5 = 0$, …, $a_{2k-1} = 0$. $a_2 = -1$, $a_4 = -1$, …, $a_{2k-2} = -1$. Тогда

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} = \frac{(-1)(k-1)}{n} = -\frac{\frac{n+1}{2}-1}{2} = -\frac{n-1}{2n}$$

Заметим, что

$$-\frac{n-1}{2n} > -\frac{1}{2}$$

Действительно, $-\frac{n-1}{2n} > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{n-1}{n} > 1 \Leftrightarrow n-1 < n \Leftrightarrow -1 < 0.$

Наконец, заметим, что значение $-\frac{1}{2}$ для целых $a_1, \ldots, a_n$ не достигается для нечётных n. Действительно, в противном случае имеем:

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} = -\frac{1}{2}$$

Тогда

$$2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = -n$$

Произведение слева чётно, а число справа нечётно, что невозможно.

Заключение

В работе доказана формула нахождения максимального члена для плавных последовательностей по 1-м разностям и приведена формула нахождения максимального члена для плавных последовательностей по 2-м разностям. Представлен пример построения последовательностей плавных по 3-м разностям. Задача о высоте плавной последовательности не решена в общем виде. Представлено новое определение плавных последовательностей, рассмотрены свойства, решена задача о минимальном среднеарифметическом для них.

Список литературы

1. Васильев Н. Плавные последовательности. – М.: Библиотечка «Квант», выпуск 125 – М.: МЦНМО, 2012. - С. 131–139.
2. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 1. Арифметика и алгебра. - М.: Физматлит, 2001.
3. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. - М.: Мир, 1972. - С. 81–95.