Бакаляр Глеб (8 класс)

«Магические квадраты с рациональной магической суммой»
Работа заняла III место на Всероссийском форуме научной молодежи «Шаг в будущее» (г. Москва). Секция «Математика и компьютерные науки»

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа и теории функций Самарского национального исследовательского университета им. С.П. Королева, преподаватель математики Лицея № 1 «Спутник»
Алякин Владимир Алексеевич

Введение

Магические квадраты известны уже более 4 тыс. лет. В древности им приписывали таинственные и мистические свойства. Затем долгое время, вплоть до XX века, магические квадраты принадлежали жанру занимательной математики. Однако начиная с конца XX в. они перестали быть только объектом математических развлечений и очень изящной головоломкой. Сейчас магические квадраты находят практические применения в теории информации и в новейших технологиях создания цифровых изображений. В связи с этим тема настоящей работы является **актуальной.**

Классические магические квадраты составляются из последовательных натуральных чисел, начиная с 1. Классическим магическим квадратам посвящено огромное количество публикаций, см. например, [1], [2], [3], [4], [5]. Рассматривались и общие магические квадраты, составленные из произвольных вещественных чисел, в том числе повторяющихся [2].

Настоящая работа посвящена исследованию общих магических квадратов, составленных из иррациональных чисел [6], но имеющих рациональную магическую сумму. Работа является продолжением работы [7], в которой основное внимание было уделено магическим квадратам порядка 3 и начато исследование квадратов порядка 4. В настоящей работе закончено исследование магических квадратов 4 порядка и получены некоторые общие результаты для квадратов произвольного четного порядка.

В работе решаются следующие **основные задачи**:

1) Доказать, что нельзя составить из иррациональных чисел магический квадрат порядка 3 с рациональной магической суммой;

2) Найти возможные значения количества рациональных и иррациональных чисел в магическом квадрате порядка 3, имеющем рациональную магическую сумму;

3) Доказать, что существует магический квадрат порядка 4 с рациональной магической суммой, составленный из иррациональных чисел;

4) Найти возможные значения количества рациональных и иррациональных чисел в магическом квадрате порядка 4, имеющем рациональную магическую сумму;

5) Доказать существование магического квадрата произвольного четного порядка с рациональной магической суммой, составленного из иррациональных чисел.

Структура работы является следующей. Параграф 1 является вспомогательным. В этом параграфе мы приводим основные определения и факты о классических магических квадратах и общих магических квадратах.

В параграфе 2 показано, что магических квадратов, составленных из иррациональных чисел, и имеющих рациональную магическую сумму, не существует.

В п. 3 ставится и решается задача о соотношении количества рациональных и иррациональных чисел в магическом квадрате с

рациональной магической суммой. Показано, что количество рациональных чисел в таком квадрате может быть равно только 1, 3 или 9.

В п. 4 показано, что магические квадраты 4 порядка из иррациональных чисел с рациональной магической суммой существуют. Для доказательства использован известный магический квадрат 4 порядка А. Дюрера.

В п. 5 исследуется вопрос о количестве иррациональных и рациональных чисел в магическом квадрате 4 порядка с рациональной магической суммой. Показано, что количество рациональных чисел в таком квадрате может быть равно 0,1,2,3,4,5,6,7,8,10,12 и 16.

В п. 6 исследуется вопрос о расположении рациональных и иррациональных чисел в магическом квадрате 4 порядка с рациональной магической суммой: в каких клетках квадрата могут находиться иррациональные числа, а в каких не могут?

В п. 7 доказана общая теорема для квадратов четного порядка: при любом четном $n>2$ существует магический квадрат порядка n из иррациональных чисел с рациональной магической суммой.

В заключительном 8 п. ставится нерешенная задача и формулируется соответствующая гипотеза для квадратов нечетного порядка.

1. Классические и общие магические квадраты. Рациональные и иррациональные числа

Расставим n^2 произвольных вещественных чисел в клетках квадрата nxn так, чтобы суммы чисел в каждой строке, каждом столбце и двух диагоналях были равны. Такая таблица чисел называется классическим магическим квадратом порядка n.

Число, равное сумме чисел магического квадрата в какой-нибудь строке (столбце, диагонали) называется магической суммой данного квадрата.

Общим магическим квадратом будем называть магический квадрат, составленный из произвольных вещественных чисел. Такие магические квадраты рассматривались в работе [2].

Вещественное число x называется рациональным, если

$$x=m/n,$$

где n- натуральное число, m — целое число.

Например, рациональными являются числа

$$-1/2;\ 5/4;\ -3;\ 0;\ -2{,}7;\ 3{,}5.$$

С античных времен известно [6], что иррациональным является любое число вида: корень квадратный из натурального числа n, не являющегося полным квадратом.

2. Магические квадраты 3 порядка с рациональной магической суммой

Основным результатом этого п. является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Магический квадрат порядка 3 из иррациональных чисел с рациональной магической суммой не существует.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим магический квадрат порядка 3:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Предположим, что все числа a, b, c, d, e, f, g, h, i - иррациональные, а магическая сумма - число рациональное. Обозначим магическую сумму через M. Тогда справедливы равенства

$$a+e+i=M,\ g+e+c=M,\ d+e+f=M,\ b+e+h=M. \qquad (1)$$

Сложим все четыре равенства почленно. Получим

$$a+e+i+g+e+c+d+e+f+b+e+h=4M.$$

Сгруппируем слагаемые в левой части этого равенства следующим образом:

$$(a+d+g)+ (b+e+h)+(c+f+i)+3e=4M.$$

В силу (1) получаем

$$M+M+M+3e=4M,\ 3e=M,\ e=M/3.$$

Так как число M иррационально, то число e также иррационально. Получили противоречие с иррациональностью числа e.

Теорема доказана.

Итак, все 9 чисел в магическом квадрате 3x3 с рациональной магической суммой иррациональными быть не могут. Значит, имеется хотя бы одно рациональное число.

3. Возможные значения количества рациональных и иррациональных чисел в квадратах 3 порядка

В связи с теоремой 1 возникает естественный вопрос: сколько рациональных и иррациональных чисел может быть в магическом квадрате 3x3 с рациональной магической суммой? В частности, каким может быть наибольшее количество иррациональных чисел в таком квадрате?

На эти вопросы отвечает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Для магического квадрата 3x3 с рациональной магической суммой возможны только следующие три варианта:

1) Одно число рационально, 8 - иррациональны, причем рациональное число может находиться только в центре квадрата;
2) Три числа рациональны, 6 - иррациональны;
3) Все 9 чисел рациональны.

Доказательство. 1) Выше было показано, что центральное число в квадрате равно M/3, где M — магическая сумма квадрата. Так как M рационально, то центральное число рационально. Приведем пример магического квадрата, в котором только одно число рациональное, а остальные 8 чисел иррациональны.

Идея построения примера состоит в следующем. Рассмотрим какой-нибудь классический магический квадрат порядка 3, например, такой:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Вычтем из каждого числа число 5 - третью часть магической суммы. Получим магический квадрат с магической суммой 0:

-1	4	-3
-2	0	2
3	-4	1

Теперь умножим каждое число на какое-нибудь иррациональное число, например, на корень квадратный из 2. Получим искомый квадрат.

2) Ровно два рациональных числа быть не может. Действительно, одно из них обязательно в центре. Тогда второе либо по диагонали, либо по столбцу, либо по строке. Тогда и третье число в этой диагонали, столбце, строке рационально. Приведем пример квадрата с ровно тремя рациональными числами.

Рассмотрим магический квадрат из 0, 1 и -1:

0	1	-1
-1	0	1
1	-1	0

Умножим все числа на корень из 2. Получим искомый квадрат.

Заметим, что три рациональных числа могут быть и в одной строке. Рассмотрим квадрат:

-1	2	-1
0	0	0
1	-2	1

Ровно 4, 5, 6, 7 или 8 рациональных чисел быть не может.
3) Все 9 чисел рациональными могут быть, очевидно. Теорема доказана.
З а м е ч а н и е. В центре квадрата не обязательно стоит число 0. Действительно, прибавим к каждому числу произвольное рациональное число r. Тогда магическая сумма равна 3r,
а в центре квадрата - число r.
СЛЕДСТВИЕ. Наибольшее количество иррациональных чисел в магическом квадрате порядка 3 с рациональной магической суммой равно 8.

4. Магические квадраты 4 порядка с рациональной магической суммой

ТЕОРЕМА 3. Существует магический квадрат 4 порядка из иррациональных чисел, имеющий рациональную магическую сумму.
Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим любой магический квадрат порядка 4, например, магический квадрат Дюрера:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Этот магический квадрат был изображен в 1514 году немецким художником Альбрехтом Дюрером (1471-1528) на гравюре «Меланхолия». Магическая сумма квадрата равна 34. Вычтем из каждого числа квадрата число 34/4=17/2 и результат умножим на 2. Получим магический квадрат с рациональной магической суммой 0:

15	-11	-13	9
-7	3	5	-1
1	-5	-3	7
-9	13	11	-15

Каждое число в этом квадрате не равно нулю. Умножим каждое число на корень квадратный из 2. Получим магический квадрат, составленный из 16 иррациональных чисел, магическая сумма которого равна рациональному числу 0. Теорема доказана.

5. Возможные значения количества рациональных и иррациональных чисел в квадратах 4 порядка

В связи с теоремой 3 возник естественный вопрос о том, сколько рациональных и иррациональных чисел может быть в магическом квадрате с рациональной магической суммой? В частности, какое наименьшее количество иррациональных чисел может быть в магическом квадрате

порядка 4 с рациональной магической суммой. На этот вопрос отвечает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Пусть магический квадрат 4 порядка имеет рациональную магическую сумму и пусть он составлен из k рациональных и 16-k иррациональных чисел. Тогда k может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ,10, 12, 16, а значения 9, 11, 13, 14, 15 - не может.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Значение k=0 - см. теорему 3.

Докажем, что k может быть равно 1. Рассмотрим следующий магический квадрат:

0	-1	-1	2
2	-1	1	-2
2	1	-1	-2
-4	1	1	2

Его магическая сумма равна 0. Он составлен из 15 ненулевых чисел и одного нуля. Умножим все числа на корень из 2. Получим магический квадрат с рациональной магической суммой 0, и все числа, кроме одного, в этом квадрате иррациональны, что и требуется.

Для значений k=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12 доказательство аналогично, поэтому далее мы приводим только примеры магических квадратов с соответствующим числом нулей.

k=2

2	-2	-1	1
1	0	0	-1
-1	1	-1	1
-2	1	2	-1

k=3

1	0	-2	1
-2	0	1	1
2	-1	0	-1
-1	1	1	-1

k=4

1	-1	-1	1
1	0	0	-1
-1	0	0	1
-1	1	1	-1

k=5

0	0	1	-1
1	1	-2	0
0	-4	1	3
-1	3	0	-2

k=6

0	-1	1	0
1	0	1	-2
-1	-1	0	2
0	2	-2	0

k=7

0	2	0	-2
-1	0	1	0
0	0	-1	1
1	-2	0	1

k=8

0	1	-1	0
1	0	0	-1
-1	0	0	1
0	-1	1	0

k=10

0	0	0	0
0	1	0	-1
0	0	-1	1
0	-1	1	0

k=12

0	0	0	0
-1	0	0	1
1	0	0	-1
0	0	0	0

Перейдем к доказательству того, что переменная k не может принимать значения 9,11,13, 14 и 15.

k=9 9 рациональных и 7 иррациональных числа.

Отметим, что в строке, столбце, диагонали не может быть ровно одного иррационального числа, а не менее двух.

Поэтому возможны только два случая (с точностью до поворотов и отражений), где рациональные числа заменены нулями.

0	0	0	0
0		0	
0	0		
0			

0	0	0	0
0	0		
0			
0		0	

В первом случае заполним клетку (b,3) неизвестным иррациональным числом x. Тогда однозначно имеем, что в (b,1) и (d,3) стоит число r1-x, где r-некоторое рациональное число. Пусть в (c,2) иррациональное число y:

0	0	0	0
0	x	0	r1-x
0	0	y	r2-y
0	-x	-y	z

Тогда в (d,2) число r2-y.

Тогда число z=x+y=r1-x+r2-y=-z, что возможно только если z=0.
Аналогично во втором случае

0	0	0	0
0	0	y	-y
0	x	-y	y-x
0	-x	0	x

Для сумм по диагоналям имеем

x+y=0, x-y=0,

откуда x=0, - противоречие, так как 0 - рациональное число.

k=11 Перебор показывает, что при любом расположении 11 рациональных чисел хотя бы в одной строке, столбце или диагонали будет 3 рациональных числа. Тогда в этой строке, столбце или диагонали одно иррациональное число. Но сумма трех рациональных чисел и одного иррационального числа - иррациональное число. Получили противоречие с рациональностью магической суммы.
K=13, 14,15 — так же, как для r=11.

Теорема доказана.

6. Расположение рациональных и иррациональных чисел в магических квадратах 4 порядка с рациональной магической суммой

В этом п. обсуждается вопрос о том, в каких клетках квадрата могут находиться рациональные и иррациональные числа, если магическая сумма квадрата - иррациональное число.

Все теоремы этого п. доказываются однотипным образом: мы приводим конкретные примеры расположения рациональных чисел, их мы заменяем нулями. Остальные клетки заполняем ненулевыми числами так, чтобы магическая сумма была равна нуля. Тогда для построения примера умножаем каждое число на корень произвольное иррациональное число, например, на корень квадратный из 2.

Во всех теоремах предполагается, что магическая сумма квадрата - рациональное число.

ТЕОРЕМА 5. Пусть в магическом квадрате 4 порядка одно (или два) рациональных числа и 15 (соответственно, 14) иррациональных чисел. Тогда рациональные числа могут находиться в любых клетках квадрата.

Доказательство. Как показано выше, один или два нуля могут находиться в любых клетках квадрата 4 порядка, что доказывает теорему.

ТЕОРЕМА 6. Пусть в магическом квадрате 4 порядка три рациональных числа и 13 иррациональных чисел. Тогда рациональные числа не могут располагаться в одной строке, одном столбце или одной диагонали.

Доказательство. Следует из того, что если 3 рациональных числа расположены в одной строке, то четвертое число иррациональное. Тогда сумма чисел в этой строке иррациональна, чего нет.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 7. Пусть в магическом квадрате 4 порядка четыре, пять, шесть или семь рациональных числа и 12 (11, 10, 9 соответственно) иррациональных чисел. Тогда рациональные числа могут располагаться в любых клетках квадрата, но не по три числа в одной строке, одном столбце или одной диагонали.

ТЕОРЕМА 8. Пусть в магическом квадрате 4 порядка восемь рациональных чисел и 8 иррациональных чисел. Тогда рациональные числа могут располагаться в угловых клетках и клетках центрального квадрата 2x2.

ТЕОРЕМА 9. Пусть в магическом квадрате 4 порядка 10 рациональных чисел и 6 иррациональных чисел. С точностью до поворота рациональные числа могут располагаться в первой строке, первом столбце, главной

диагонали и правой нижней клетке.

ТЕОРЕМА 10. Пусть в магическом квадрате 4 порядка 10 рациональных чисел и 6 иррациональных чисел. С точностью до поворота рациональные числа могут располагаться в первой и четвертой строке и в клетках центрального квадрата 2x2.

7. **Общая теорема для магических квадратов четного порядка**

В теории чисел наиболее ценными являются общие утверждения, т. е. утверждения, справедливые для всех натуральных чисел или для бесконечного множества натуральных чисел. Обычно такие утверждения являются и самыми сложными.

В рамках темы настоящей работы общее утверждение звучит так: верно ли, что для всех натуральных чисел, начиная с некоторого, существует магический квадрат с рациональной магической суммой, составленный из иррациональных чисел?

Для магических квадратов четного порядка справедлива следующая общая теорема.

ТЕОРЕМА 11. Для любого четного n>=4 существует магический квадрат порядка n с рациональной магической суммой, составленный из иррациональных чисел.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Магическая сумма квадрата порядка n равна

$$M = 1/2n(1+n^2).$$

Пусть n четно и пусть n=2k. Тогда

$$M=1/2*2k(1+4k^2)=k(1+4k^2).$$

Вычтем из каждого числа квадрата число M/n=M/2k=1/2(1+4k^2)=1/2+2k^2. Получим магический квадрат с рациональной магической суммой 0.

Важно, что каждое число в этом квадрате не равно 0. Действительно, для любого натурального числа m из отрезка [1,n^2] получили число

$$m-1/2-2k^2,$$

а оно не равно нулю поскольку не является целым.

Теперь умножим каждое число на корень квадратный из 2. Тогда получим квадрат с магической суммой 0, составленный из иррациональных чисел. Теорема доказана.

8. **Нерешенная задача и гипотеза для магических квадратов четного порядка**

Анализ результатов, полученных в пп. 2-5, позволяет выдвинуть следующую гипотезу.

Гипотеза

При любом нечетном n>3 существует магический квадрат порядка n с рациональной магической суммой, составленный из иррациональных чисел.

Эти гипотеза пока не доказана и не опровергнута и представляет нерешенную задачу.

Заключение

В работе проведено исследование магических квадратов, составленных из иррациональных чисел, но имеющих рациональную магическую сумму. Показано, что магических квадратов 3 порядка с такими свойствами не существует, а 4 порядка - существуют. Для магических квадратов 3 и 4 порядка полностью решен вопрос о возможном количестве рациональных и иррациональных чисел.

Для магических квадратов четного порядка доказана общая теорема о существовании при любых $n>2$ квадрата порядка n с рациональной магической суммой, составленного из иррациональных чисел.

Аналогичная задача для магических квадратов нечетных порядков больше 3 оказалась сложной и пока не решена.

Список литературы

1. Постников М. М. Магические квадраты. - М.: Наука, 1964.
2. Трошин В. В. Магия чисел и фигур. - М.: Глобус, 2007. - 382 с.
3. Макарова Н. В. Волшебный мир магических квадратов. - Саратов, 2009. - 180 с.
4. Гарднер М. Математические досуги. - М.: Мир, 1972.
5. Кордемский Б. А. Математическая смекалка. - М.: ГИТТЛ, 1957.
6. Нивен А. Числа рациональные и иррациональные. - М.: Мир, 1966. - 198 с.
7.Бакаляр Г. Магические квадраты 3 и 4 порядка с рациональной магической суммой // Сборник лучших научно-исследовательских работ учащихся Лицея № 1 «Спутник» 2015-2020. Том 1. - Самара, 2020. - С. 159-167.